

($\mu=0$). Das Maximum ist bei allen fünf Kurven etwa das 1,5-fache des jeweiligen Wertes für $\lambda=0$. Dies gilt vermutlich für alle Werte von ε , doch läßt sich Genaueres nicht sagen, da die Kurven nur numerisch bekannt sind.

Abb. 7 zeigt für $\varepsilon=0,125$ die Grenzradien

$$Q_i = s_i/s_0 \quad \text{und} \quad Q_a = s_a/s_0$$

und den aus der Näherungslösung folgenden Abstand des Gyrozentrums.

Herrn Dr. A. SCHLÜTER danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und Diskussionen. Frau G. HAIN danke ich für die Mitwirkung bei den numerischen Rechnungen auf der Göttinger Elektronischen Rechenmaschine G 2.

Berechnung des Einflusses der Anisotropie und eines zusätzlichen Magnetfeldes auf den elektrischen Durchschlag mit Anwendung auf Germanium*

VON WOLFGANG FRIE*

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Münster i. W.
(Z. Naturforsch. 14 a, 54—62 [1959]; eingegangen am 20. August 1958)

Es werden die von FRANZ¹ angegebenen Formeln auf den elektromagnetischen Fall erweitert und für Germanium ausgewertet. Die Formeln für die Erhöhung der Durchschlagfeldstärke durch das Magnetfeld lassen sich mit den von FINKE² gemessenen Kurven vergleichen. Sie liefern Aussagen über die Richtungsabhängigkeit des Effektes. Die Formeln lassen sich durch einen verhältnismäßig einfachen Formalismus gewinnen.

1. Allgemeine Formeln zur Berechnung der Verteilungsfunktion Die „effektive Feldstärke“

FRANZ hat ein Gleichungssystem angegeben, das die Verteilungsfunktion $f(\mathbf{f})$ der Elektronen im Falle eines rein elektrischen Feldes zu berechnen gestattet (s. Anm. ¹, S. 220 ff.). Dazu macht man den folgenden Ansatz:

Die Verteilungsfunktion $f_0(E)$ wird durch das Feld \mathcal{F} ein Stück in Richtung $-\mathcal{F}$ mitgenommen. Es ist also

$$f(\mathbf{f}) = f_0(\mathbf{f} - \Delta \mathbf{f}) = f_0(E) + \frac{e}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathcal{F} \tau \frac{df_0(E)}{dE}. \quad (1.1)$$

Schreibt man $\tau(\mathbf{f})$ für τ , so ist dies eine Aufspaltung von $f(\mathbf{f})$ in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil, wenn man $\tau(\mathbf{f})$ als symmetrisch in \mathbf{f} voraussetzt.

Angeregt durch Messungen von LAUTZ³ und FINKE² soll ein zusätzliches Magnetfeld mit berücksichtigt werden. Um möglichst weitgehende Allge-

meinheit zu bewahren, sei an Stelle von $\tau(\mathbf{f})$ die in \mathbf{f} antisymmetrische Hilfsgröße $\lambda(\mathbf{f})$ eingeführt durch die Definition:

$$\lambda(\mathbf{f}) \equiv \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{n} \tau(\mathbf{f}); \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\mathcal{F}}{F}. \quad (1.2)$$

Die Verbindung mit der Relaxationszeit τ soll später wieder hergestellt werden. Der Ansatz für die Verteilungsfunktion ist also

$$f(\mathbf{f}) = f_0(E) + e F \lambda(\mathbf{f}) \frac{df_0(E)}{dE}. \quad (1.3)$$

Für die Veränderung der Verteilungsfunktion gilt die BOLTZMANNsche Gleichung:

$$\frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \cdot \left[f(\mathbf{f}) \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right] + \int d^3\mathbf{f}' [c(\mathbf{f}'; \mathbf{f}) f(\mathbf{f}') - c(\mathbf{f}; \mathbf{f}') f(\mathbf{f})]. \quad (1.4)$$

$c(\mathbf{f}; \mathbf{f}')$ ist die zeitliche Wahrscheinlichkeit für einen Übergang vom Zustand \mathbf{f} in die Volumeneinheit \mathbf{f}' durch Gitterstöße, $c(\mathbf{f}'; \mathbf{f})$ die für einen Übergang von der Volumeneinheit \mathbf{f}' in den Zustand \mathbf{f} . Stoßionisation und Rekombination sind hierbei vernach-

* Jetzt: Forschungslaboratorium der Siemens-Schuckertwerke AG, Erlangen.

* Auszug aus der Dissertation Münster i. W. 1958.

¹ W. FRANZ, Handbuch der Physik, Band XVII; im folgenden mit A zitiert.

² G. FINKE, Dissertation, Braunschweig 1957. Vgl. auch G. FINKE und G. LAUTZ, Z. Naturforsch. 14 a, 62 [1959]; nachstehend.

³ G. LAUTZ, Vortrag auf der Tagung der Nordwestdeutschen Physikalischen Gesellschaft, April 1957, in Münster i. W.



lässtigt. Da

$$\frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{e}{\hbar} \mathbf{\nabla} - \frac{e}{\hbar^2} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{f}} \times \mathbf{B}, \quad (1.5)$$

$$\text{ist} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \cdot \frac{\partial E}{\partial \mathbf{f}} \times \mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \times \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} E \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}} \cdot \left[f(\mathbf{f}) \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \right] = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}}. \quad (1.6)$$

Der symmetrische Teil der BOLTZMANNschen Gl. (1.4) liefert den „Energiestrom“ $S(E)$, d. h. die Anzahl der Teilchen, die pro Sekunde durch die Energiefläche E treten:

$$S(E) \equiv - \int_{E' < E} d^3\mathbf{f}' \frac{\partial f(\mathbf{f}')}{\partial t} = - \int_{E' < E} d^3\mathbf{f}' \left\{ \frac{\partial f(\mathbf{f}')}{\partial t} \right\}_{\text{symm.}} \quad (1.7)$$

oder:

$$S(E) = - \frac{e^2 F^2}{\hbar} \int_E d\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \lambda(\mathbf{f}) \frac{df_0(E)}{dE} \quad (1.8)$$

$$+ \int_{E' < E} d^3\mathbf{f}' \int_{E'' > E} d^3\mathbf{f}'' \{ c(\mathbf{f}'; \mathbf{f}'') f_0(E') - c(\mathbf{f}''; \mathbf{f}') f_0(E'') \};$$

$d\mathbf{s}$ ist das Flächenelement der Energiefläche.

Der quasistatisch behandelte antisymmetrische Teil der BOLTZMANNschen Gleichung — bei MADELUNG⁴ BOLTZMANNsche Stationaritätsbedingung genannt — liefert eine Bestimmungsgleichung für $\lambda(\mathbf{f})$, wenn man beachtet, daß die Gitterstöße nur wenig von der Energiefläche fortführen:

$$\frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{n} + \frac{e}{\hbar^2} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{f}} \times \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \lambda(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}} \quad (1.9)$$

$$= \int d^3\mathbf{f}' \{ \lambda(\mathbf{f}) c(\mathbf{f}; \mathbf{f}') - c(\mathbf{f}'; \mathbf{f}) \lambda(\mathbf{f}') \}.$$

Berücksichtigt man Stoßionisation und Rekombination, so bekommt man noch Gl. (A, 35.6) unverändert; sie verbindet die Änderung des Energiestroms mit den Stoßionisations- und Rekombinationswahrscheinlichkeiten.

Denkt man sich $\lambda(\mathbf{f})$ aus Gl. (1.9) ausgerechnet, so kommen die Feldstärken in den den Energiehaushalt beschreibenden Gln. (1.8) und (A, 35.6) explizit nur noch in dem Ausdruck

$$F^2 \int_E d\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \lambda(\mathbf{f}) \quad (1.10)$$

vor. Definiert man sich eine „effektive Feldstärke“ durch

$$F_{\text{eff}}^2(E) \equiv F^2 \frac{\int_E d\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \lambda(\mathbf{f})}{\int_E d\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \lambda_0(\mathbf{f})}; \quad \lambda_0 \equiv \lambda/\mathbf{B} = 0 \quad (1.11)$$

so bedeutet das, daß die Feldstärke F bei Anwesen-

heit des Magnetfeldes \mathbf{B} dieselbe Wirkung hat wie die effektive Feldstärke im rein elektrischen Falle. Gl. (1.11) gestattet es, den Einfluß eines zusätzlichen Magnetfeldes zu studieren.

Unter den Voraussetzungen:

- $\lambda(\mathbf{f}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}(E)$,
- Die Energiefläche besteht aus gleichartigen Teilstücken,

wird wegen des Integralsatzes

$$\int_E d\mathbf{s} = \int_{E' < E} d^3\mathbf{f}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{f}'} : \quad (1.12)$$

$$\frac{F_{\text{eff}}^2}{F^2} = \frac{\sum \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(E)}{\sum \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}_0(E)}. \quad (1.13)$$

Die Summen sind dabei über die Teilstücke der Energiefläche zu erstrecken.

Die Definitionsgleichung (1.11) entspricht der Forderung, daß die Leistungsaufnahme eines Elektrons im Inneren der Energiefläche E mit und ohne Magnetfeld dieselbe sein soll. Die Leistungsaufnahme an der durch das Feld verschobenen Stelle

$$E + \Delta E = E - \frac{e}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{\nabla} \tau = E - e F \lambda(\mathbf{f}) \quad (1.14)$$

ist gegeben durch:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} = - \frac{e}{\hbar} \mathbf{\nabla} \cdot \frac{\partial E}{\partial \mathbf{f}} + \frac{e^2 F^2}{\hbar} \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \lambda(\mathbf{f})}{\partial \mathbf{f}}. \quad (1.15)$$

Die gesamte mittlere Leistungsaufnahme wird:

$$\int_{E' < E} d^3\mathbf{f}' \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \mathbf{v} = \frac{e^2 F^2}{\hbar} \mathbf{n} \cdot \int_{E' < E} d^3\mathbf{f}' \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{f}'}$$

$$= \frac{e^2 F^2}{\hbar} \int_E d\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} \lambda(\mathbf{f}). \quad (1.16)$$

Die geforderte Gleichheit der Leistungsaufnahme liefert (1.11).

2. Berechnung des antisymmetrischen Teils der Verteilungsfunktion und der effektiven Feldstärke

Die Einfachheit von Gl. (1.13) legt es nahe, mit dem Lösungsansatz

$$\lambda(\mathbf{f}) = \mathbf{f} \cdot \mathbf{r}(E) \quad (2.1)$$

in Gl. (1.9) einzugehen. Dazu sei folgendes vorausgesetzt:

1. Die Energiefläche besteht aus gleichartigen Teilflächen. In jedem Energietal hängt der Massentensor nur von der Energie ab. \mathbf{f} werde vom Energie-

⁴ O. MADELUNG, Handbuch der Physik, Band XX.

minimum aus gerechnet. Dann gilt für den Energiegradienten:

$$\frac{\partial E}{\partial \mathbf{f}} = \hbar^2 \Phi(E) \cdot \mathbf{f}. \quad (2.2)$$

$\Phi(E)$ ist der Tensor der reziproken Massen; er wird als symmetrisch vorausgesetzt.

2. Die Gitterstöße spielen sich hauptsächlich in einem Energietal ab. Zieht man $\mathbf{r}(E)$ als nahezu konstant aus den Stoßintegralen heraus, so gelte für die verbleibende, in \mathbf{f} antisymmetrische Vektorfunktion:

$$\int d^3\mathbf{f}' \{ \mathbf{f} c(\mathbf{f}; \mathbf{f}') - \mathbf{f}' c(\mathbf{f}'; \mathbf{f}) \} = \mathbf{f} \cdot \mathfrak{T}_0^{-1}(E); \quad (2.3)$$

$\mathfrak{T}_0^{-1}(E)$ sei wieder ein symmetrischer Tensor.

Unter den angegebenen Bedingungen läßt sich aus (1.9) eine Lösung in der Form

$$\lambda(\mathbf{f}) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{f}} \cdot \mathbf{a}(E) \quad (2.4)$$

gewinnen. Beachtet man (2.2) und (2.3) und läßt $(1/\hbar) \cdot (\partial E / \partial \mathbf{f})$ als gemeinsamen Faktor fort, so bekommt man

$$\mathbf{n} - e \mathbf{a} \cdot \Phi(E) \times \mathfrak{B} = \mathbf{a} \cdot \mathfrak{T}_0^{-1}(E) \quad (2.5)$$

oder $\mathbf{a} = \mathbf{n} \cdot \mathfrak{T}(E); \lambda(\mathbf{f}) = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial \mathbf{f}} \mathbf{n} \cdot \mathfrak{T}(E),$

$$\mathfrak{T}(E) = (\mathfrak{T} + e \mathfrak{T}_0(E) \cdot \Phi(E) \times \mathfrak{B})^{-1} \cdot \mathfrak{T}_0(E). \quad (2.6)$$

(\mathfrak{T} = Einheitstensor)

Hierbei ist das Vektorprodukt als Skalarprodukt mit einem antisymmetrischen Tensor aufzufassen. Für (1.13) erhält man

$$\frac{F_{\text{eff}}^2}{F^2} = \frac{\sum \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot (\mathfrak{T} \cdot \Phi)}{\sum \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot (\mathfrak{T}_0 \cdot \Phi)}. \quad (2.7)$$

Durch Entwickeln des Tensors \mathfrak{T} zeigt man für den antisymmetrischen Anteil \mathfrak{T}_a :

$$\mathbf{n} \mathbf{n} \cdot (\mathfrak{T}_a \cdot \Phi) = 0. \quad (2.8)$$

Die Entwicklung von (2.7) nach \mathfrak{B} ergibt

$$\frac{F_{\text{eff}}^2}{F^2} = 1 - e^2 \frac{\sum (\mathbf{n} \cdot \mathfrak{T}_0 \cdot \Phi \times \mathfrak{B}) (\mathbf{n} \cdot \mathfrak{T}_0 \cdot \Phi \times \mathfrak{B}) \cdot (\mathfrak{T}_0 \cdot \Phi)}{\sum \mathbf{n} \mathbf{n} \cdot \mathfrak{T}_0 \cdot \Phi} + \dots \quad (2.9)$$

Aus (2.8) und (2.9) entnimmt man allgemein folgendes: Das Magnetfeld bewirkt eine Erhöhung der Durchschlagsfeldstärke. Dieser Effekt ist gegen Umpolen des Magnetfeldes unempfindlich. Es existiert ein „longitudinaler Effekt“ (elektrisches Feld und Magnetfeld parallel), der nur dann verschwindet, wenn $\mathfrak{T}_0 \cdot \Phi \sim \mathfrak{T}$ wird, also bei Isotropie.

3. Anwendung auf den Fall der Isotropie

Bei Isotropie bekommt man für $\Phi(E)$

$$\Phi(E) = \varphi(E) \mathfrak{T} \quad (3.1)$$

und für $\mathfrak{T}_0^{-1}(E)$

$$\mathfrak{T}_0^{-1}(E) = \frac{1}{\tau_0(E)} \mathfrak{T}. \quad (3.2)$$

Mit den Definitionen

$$\beta_i(E) \equiv e B \varphi(E) \tau_0(E); \quad \mathfrak{m} \equiv \mathfrak{B}/B \quad (3.3)$$

erhält man durch den Ansatz

$$\mathbf{a}(E) = \alpha_1 \mathbf{n} + \alpha_2 \mathfrak{m} \times \mathbf{n} + \alpha_3 \mathfrak{m} \times (\mathfrak{m} \times \mathbf{n}) \quad (3.4)$$

und Koeffizientenvergleich aus (2.5)

$$\lambda(\mathbf{f}) = \frac{1}{\hbar} \tau_0(E) \frac{\partial E}{\partial \mathbf{f}} \mathbf{n} + \beta_i \mathfrak{m} \times \mathbf{n} + \frac{\beta_i^2 (\mathfrak{m} \cdot \mathbf{n})}{1 + \beta_i^2} \mathbf{f}. \quad (3.5)$$

(3.5) stimmt überein mit der von MADELUNG angegebenen Formel (22.22) (s. Anm. 4, S. 53).

(1.13) bekommt die Gestalt:

$$\frac{F_{\text{eff}}^2}{F^2} = \frac{1 + \beta_i^2 (\mathfrak{m} \cdot \mathbf{n})^2}{1 + \beta_i^2}. \quad (3.6)$$

Man sieht: Maßgebend für die Erhöhung der Durchschlagsfeldstärke ist nur die Transversalkomponente des Magnetfeldes.

4. Anwendung auf den Fall rotationsellipsoidischer Energieflächen

Zur Behandlung von (2.6) und (2.7) braucht man Voraussetzungen über den Massentensor und den Stoßzeit-Tensor \mathfrak{T}_0 . Es sei nun vorausgesetzt:

Die Energieflächen sind Rotationsellipsoide. Die Figurenachsen haben die Einheitsvektoren \mathbf{t}_i ; i numeriert die verschiedenen Figurenachsenrichtungen. Die transversale Masse sei m_t , die longitudinale Masse m_l . Dann ist die Energie, vom Energietal aus gerechnet

$$E = \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{k_r^2}{m_t} + \frac{k_z^2}{m_l} \right) = \frac{\hbar^2}{2 m_t} [\mathbf{f}^2 - a^2 (\mathbf{f} \cdot \mathbf{t}_i)^2] \quad (4.1)$$

mit

$$a^2 \equiv 1 - m_t/m_l \quad (4.2)$$

und

$$\Phi = \frac{1}{m_t} (\mathfrak{T} - a^2 \mathbf{t}_i \mathbf{t}_i). \quad (4.3)$$

Transformiert man den Tensor \mathfrak{T}_0^{-1} auf Hauptachsen, so bekommt man die Darstellung

$$\mathfrak{T}_0^{-1} = \omega_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \omega_1 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \omega_2' \mathbf{t}_i \mathbf{t}_i \quad (4.4)$$

oder mit

$$\omega_2 \equiv \omega_2' - \omega_1 \text{ und } e_1 e_1 + e_2 e_2 + t_i t_i = \mathfrak{S}: \quad (4.5)$$

$$\mathfrak{S}_0^{-1}(E) = \omega_1(E) \mathfrak{S} + \omega_2(E) t_i t_i. \quad (4.6)$$

Daraus ergibt sich der Produkttensor

$$(\mathfrak{S}_0 \cdot \Phi)^{-1} = m_t \omega_1(E) [\mathfrak{S} + \alpha(E) t_i t_i] \quad (4.7)$$

mit dem Anisotropiefaktor

$$\alpha(E) \equiv \frac{m_l}{m_t} \left(a_2 + \frac{\omega_2(E)}{\omega_1(E)} \right). \quad (4.8)$$

Mit der Definition

$$\beta(E) \equiv \frac{e B}{\omega_1(E) m_t} \quad (4.9)$$

erhält man die Gleichungen:

$$\lambda(\mathfrak{f}) = \frac{\hbar}{m_t \omega_1} \mathfrak{f} \quad (4.10)$$

$$\frac{n + \beta m \times n + \beta^2 m \cdot n m + \alpha t_i \times (n \times t_i) + \alpha \beta m \cdot t_i t_i \times n}{1 + \beta^2 + \alpha[1 + \beta^2 (m \cdot t_i)^2]}$$

$$\text{und } \frac{F_{\text{eff}}^2}{F^2} = \frac{\sum_i \frac{1 + \beta^2 (m \cdot n)^2 + \alpha (n \times t_i)^2}{1 + \beta^2 + \alpha[1 + \beta^2 (m \cdot t_i)^2]}}{\sum_i \frac{1 + \alpha (n \times t_i)^2}{1 + \alpha}}. \quad (4.11)$$

In (4.11) ist über die verschiedenen Figurenachsenrichtungen zu summieren. Bei $\alpha = 0$ gehen (4.10) und (4.11) in die isotropen Formeln (3.5) und (3.6) über.

5. Anwendung auf Germanium

Die Gestalt der Energieflächen bei Germanium ist von einer Reihe von Autoren untersucht worden (s. Anm. ⁴, S. 231, sowie Anm. ⁵⁻⁸). Auf Grund dieser Untersuchungen wird das Modell des § 4 in folgender Form benutzt:

Die Energieflächen sind gestreckte Rotationsellipsoide längs der acht Raumdiagonalen. Die Mittelpunkte der Rotationsellipsoide werden auf der Grenze des Blochschen Periodizitätspolyeders angenommen, so daß acht halbe oder vier ganze Rotationsellipsoide die im Periodizitätspolyeder liegende Energiefläche bilden. Dabei ist m_t die transversale und m_l die longitudinale Masse.

Zur Berechnung des Tensors \mathfrak{S}_0 braucht man Voraussetzungen über die Matrixelemente der Gitterstreuung und die Form der Gitterschwingungen.

Die Matrixelemente der Gitterstreuung sind von TEWORDT⁹ für lange akustische Wellen in Form einer Entwicklung nach dem Wellenzahlvektor η berechnet worden. Diese Berechnung läßt sich auf optische Wellen übertragen und durch weitere Ausnutzung der Symmetrioperationen des Gitters vereinfachen. Von der Entwicklung nach η wird jeweils nur das erste nicht verschwindende Glied beibehalten.

Die Berechnungen von SMITH¹⁰ und YÜ-CHANG HSIEH¹¹ zeigen, daß die Richtungsabhängigkeit der Kreisfrequenz $\omega(\eta)$ gegenüber der des Energiegradienten nicht sehr erheblich ist. Es wird deshalb die folgende Näherung benutzt:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{opt}}^{(1)} = \omega_{\text{opt}}^{(2)} = \omega_{\text{opt}}^{(3)} = \omega_0 = \text{const} \\ \text{für die drei optischen} \\ \text{Zweige,} \\ \omega_{\text{ak}}^{(1)} = \omega_{\text{ak}}^{(2)} = \omega_{\text{ak}}^{(3)} = c \cdot y \text{ für die drei} \\ \text{akustischen Zweige.} \\ y \equiv |\eta|; \quad c = \text{Schallgeschwindigkeit.} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Unter diesen Voraussetzungen liefert die Auswertung der Stoßintegrale unter Vernachlässigung der Intertalstreuung:

$$\begin{aligned} \omega_1(E) = \frac{3 v_a m_t}{\pi \hbar^4} \left\{ \sqrt{2 m_l} E_0^2 \sum_{\varepsilon=\pm 1} \left[\delta(T) \frac{2 k T}{\hbar \omega_0} + [2 + \varepsilon - \delta(T)] \right] \sqrt{E - \varepsilon \hbar \omega_0} \right. \\ \left. + \frac{2 m_l E}{a^4 \hbar} A^2 \left[\delta(T) \frac{4 k T}{c \sqrt{2 m_t} E} + 2 [2 - \delta(T)] \frac{m_l}{a^4 m_t} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\omega_2(E) = \frac{4 v_a m_l^2 E}{\pi a^8 \hbar^5} A^2 [2 - \delta(T)]. \quad (5.3)$$

Dabei haben E_0^2 , A^2 usw. folgende Bedeutung:

E_0^2 ; A^2	Konstanten, die aus den Elektronenwellenfunktionen zu berechnen sind,
k	die BOLTZMANNsche Konstante,
T	die absolute Temperatur,

⁵ B. LAX et al., Phys. Rev. **93**, 1418 [1954].

⁶ G. DRESSELHAUS et al., Phys. Rev. **98**, 368 [1955].

⁷ B. LAX et al., Physica **20**, 818 [1954].

⁸ F. HERMAN, Physica **20**, 801 [1954].

⁹ L. TEWORDT, unveröffentlicht, erscheint demnächst als § 4 in: W. FRANZ, Forschungsberichte des Wirtschafts- und

Verkehrsministeriums Nordrhein-Westfalen, Westdeutscher Verlag Köln und Opladen, Nr. 622.

¹⁰ HELEN M. J. SMITH, Trans. Roy. Soc., Lond. A **241**, 105 [1948].

¹¹ YÜ CHANG HSIEH, J. Chem. Phys. **22**, 306 [1954].

- ε nimmt den Wert $+1$ an bei der Emission und den Wert -1 bei der Absorption eines Gitterquants,
 $\delta(T)$ sei eine interpolierende Funktion, die bei tiefen Temperaturen den Wert 0 hat, bei hohen Temperaturen den Wert 1 ,
 v_a das Volumen der Elementarzelle.

Bei Germanium hat t_i die Richtung der Raumdiagonalen. i läuft von 1 bis 4 . Mit

$$\sum_{i=1}^4 t_i t_i = \frac{4}{3} \mathfrak{I} \quad (5.4)$$

und (5.5)

$$\sum_{i=1}^4 (n \times t_i)^2 = \sum_{i=1}^4 1 - n n \cdot \sum_{i=1}^4 t_i t_i = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$$

bekommt (4.11) die Gestalt

$$\frac{F_{\text{eff}}^2}{F^2} = \frac{3}{8} \frac{1+\alpha}{\frac{3}{2}+\alpha} \sum_{i=1}^4 \frac{1+\beta^2(m \cdot n)^2 + \alpha(n \times t_i)^2}{1+\beta^2+\alpha[1+\beta^2(m \cdot t_i)^2]} \quad (5.6)$$

Bei Germanium ist $m_i/m_t \approx 20$, also ist $\alpha \gg 1$. Deshalb lassen sich (4.10) und (5.6) weiter vereinfachen:

$$\lambda(\mathbf{f}) = \frac{\hbar}{m_t \omega_1} \mathbf{f} \cdot \frac{t_i \times (n \times t_i) + \beta m \cdot t_i t_i \times n}{1+\beta^2(m \cdot t_i)^2}, \quad (5.7)$$

$$\frac{F_{\text{eff}}^2}{F^2} = \frac{3}{8} \sum_{i=1}^4 \frac{(n \times t_i)^2}{1+\beta^2(m \cdot t_i)^2}. \quad (5.8)$$

Ob Gl. (5.6) durch die Näherungsformel (5.8) in genügender Genauigkeit ersetzt werden kann, wäre durch Experimente zu prüfen. Im folgenden sollen

aus Formel (5.8) einige Folgerungen gezogen werden.

Mißt man bei tiefen Temperaturen — wie z. B. FINKE² —, so gilt wegen der geringen Stoßhäufigkeit [siehe (4.9)!] nicht mehr $\beta \ll 1$. Die Näherungsformel, die man durch Entwicklung von (5.8) nach β^2 erhält, ist dann nicht brauchbar. In diesem Falle können, wenn man die Durchschlagsfeldstärke F gegen B aufträgt, auf Grund von (5.8) zwei Kurvenformen unterschieden werden:

- A) Für alle t_i mit $n \times t_i \neq 0$ ist auch $m \cdot t_i \neq 0$. Die Kurven zeigen bei hohen Feldern einen linearen Anstieg.
 B) Ein oder zwei $m \cdot t_i = 0$ und $n \times t_i \neq 0$. Die Kurven streben einem endlichen Sättigungswert zu.

Für die bevorzugten Richtungen von m ergibt die Summation von (5.8) einfache Ausdrücke der Form:

$$\frac{F^2}{F_{\text{eff}}^2} = \frac{(1+a_1 \beta^2)(1+a_2 \beta^2)}{(1+b \beta^2)} \quad (5.9)$$

$$= 1 + (a_1 + a_2 - b) \beta^2 + \dots$$

In Tab. 1 sind die berechneten Werte eingetragen. Dabei ist $F_0 = F|_{\beta=0}$.

Abb. 1 zeigt einige von FINKE² gemessene Kurven. Man sieht Beispiele für beide hier diskutierten Kurvenformen.

Das Ende des parabolischen Anfangsteils ist durch das Verhältnis

$$\beta = B/B_0 \quad \text{mit} \quad B_0 = m_t \omega_1 / e \quad (5.10)$$

m	n	a_1	a_2	b	$a_1 + a_2 - b$	$F^2/F_0^2/\beta \rightarrow \infty$
$(1, 0, 0)$	beliebig	$1/3$	0	0	$1/3$	$1/3 \beta^2$
$\frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0)$	beliebig	$2/3$	0	$\frac{1+n_1 n_2}{3}$	$\frac{1-n_1 n_2}{3}$	$\frac{2}{1+n_1 n_2}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1, 0)$			$1/2$	$1/6$	$4/3$
	$\frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1, 0)$			$1/6$	$1/2$	4
	$(0, 0, 1)$			$1/3$	$1/3$	2
$\frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1)$	beliebig	1	$1/9$	$\frac{3-(m \times n)^2}{3}$	$\frac{3(m \times n)^2 + 1}{9}$	$\frac{1}{3} \frac{\beta^2}{3-(m \times n)^2}$
	$(m \times n)^2 = 1$			$2/3$	$4/9$	$1/6 \beta^2$
	$m \times n = 0$			1	$1/9$	$1/9 \beta^2$

Tab. 1.

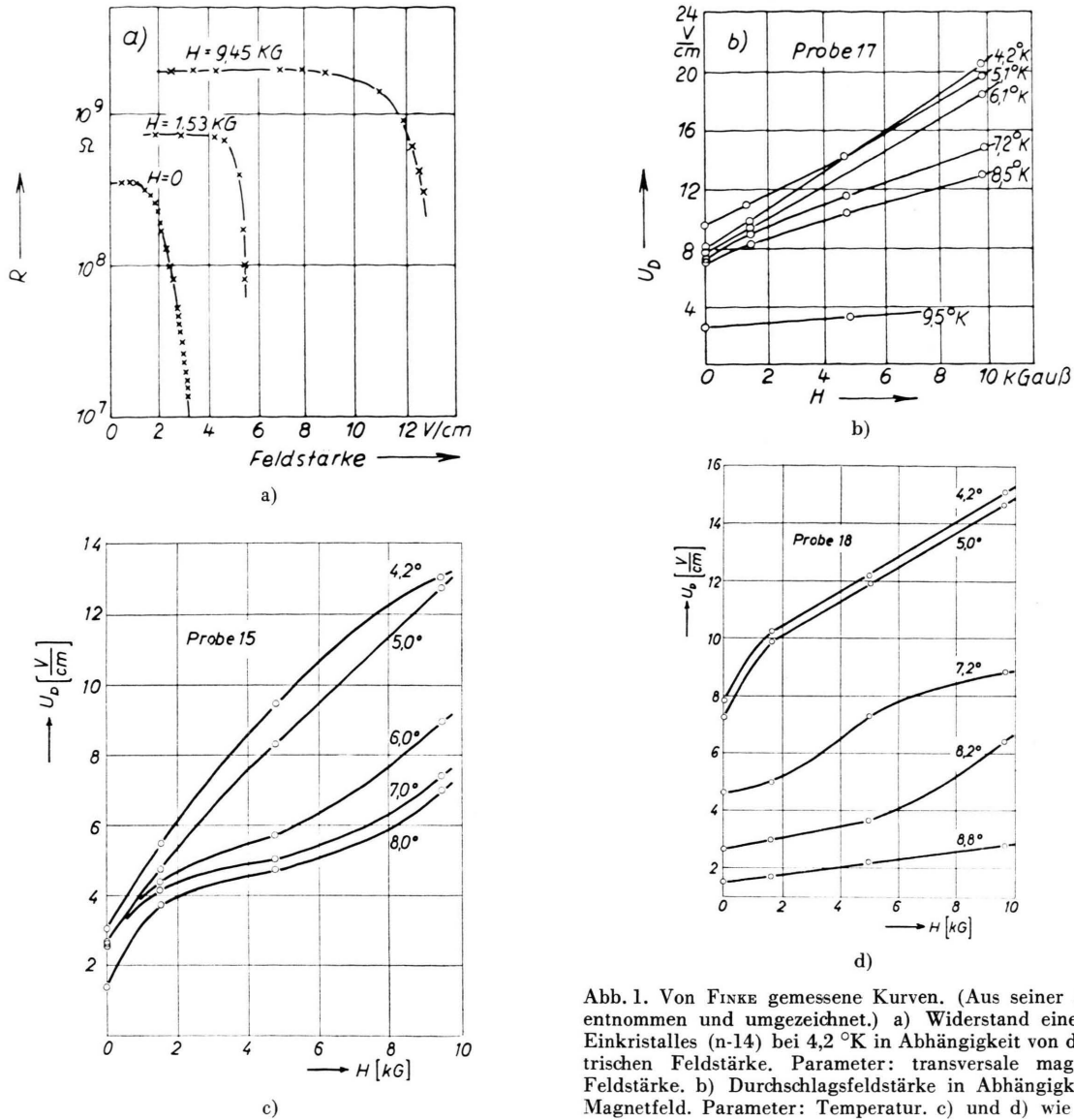


Abb. 1. Von FINKE gemessene Kurven. (Aus seiner Arbeit² entnommen und umgezeichnet.) a) Widerstand eines n-Ge-Einkristalles (n-14) bei 4.2°K in Abhängigkeit von der elektrischen Feldstärke. Parameter: transversale magnetische Feldstärke. b) Durchschlagsfeldstärke in Abhängigkeit vom Magnetfeld. Parameter: Temperatur. c) und d) wie bei b).

bestimmt. Da fast alle Kurven mit endlicher Tangente beginnen, muß B_0 klein sein. Man kann abschätzen:

$$B_0 \leq 1 \text{ kGauß}. \quad (5.11)$$

Bestimmt man ω_1 aus der Steigung der linearen Kurven der Probe 17 mit Hilfe der sich aus Tab. 1 ergebenden Beziehung

$$\frac{\Delta F}{\Delta B} \approx \frac{1}{2} \frac{F_0}{B_0}, \quad (5.12)$$

so kommt man auf

$$B_0 \approx 3 \text{ kGauß}. \quad (5.13)$$

Dies ergibt eine Stoßhäufigkeit von

$$2 - 6 \cdot 10^{11} \text{ sec}^{-1}. \quad (5.14)$$

Rechnet man mit einem Faktor 50 auf normale Temperaturen um, so kommt man auf den Wert 10^{13} sec^{-1} .

Im Gegensatz zum isotropen Fall bekommt man bei Germanium auch einen longitudinalen Effekt. Durch Messung der relativen Erhöhung der Durchschlagsfeldstärkenquadrate im longitudinalen und im transversalen Falle bei festgehaltenem Magnet-

m	n	$A_1(\beta \rightarrow 0)$	$A_1(\beta \rightarrow \infty)$	$A_1(\beta \rightarrow \infty) - A_1(\beta \rightarrow 0)$
(1, 0, 0)	beliebig	1	1	0
$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$	beliebig	$\frac{1}{2} \frac{1}{1 - n_1 n_2}$	$\frac{1}{3} \frac{1 + n_1 n_2}{1 - n_1 n_2}$	$\frac{1}{6} \frac{2n_1 n_2 - 1}{1 - n_1 n_2}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$	1/3	1/9	-2/9
	(0, 0, 1)	1/2	1/3	-1/6
$\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$	beliebig	$\frac{1}{1 + 3(m \times n)^2}$	$1 - \frac{1}{3}(m \times n)^2$	$\frac{(m \times n)^2}{3} \cdot \frac{8 - 3(m \times n)^2}{1 + 3(m \times n)^2}$
	$(m \times n)^2 = 1$	1/4	2/3	5/12
m	n	$A_2(\beta \rightarrow 0)$	$A_2(\beta \rightarrow \infty)$	$A_2(\beta \rightarrow \infty) - A_2(\beta \rightarrow 0)$
(1, 0, 0)	beliebig	1	1	0
$\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$		$\frac{1}{2} \frac{1}{1 - n_1 n_2}$	$\frac{1}{2} \frac{1}{1 - n_1 n_2}$	0
$\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$		$\frac{1}{3(m \times n)^2 + 1}$	1	$\frac{3(m \times n)^2}{3(m \times n)^2 + 1}$

Tab. 2.

feld bekommt man z. B. in den Ausdrücken

$$A_1(m, n) \equiv \left(\frac{F^2 - F_0^2}{F_0^2} \right)_1 \bigg|_{\mathfrak{B} = \text{const}}^t, \quad (5.15)$$

$$A_2(m, n) \equiv \left(\frac{F^2 - F_0^2}{F^2} \right)_1 \bigg|_{\mathfrak{B} = \text{const}}^t \quad (5.16)$$

Größen, deren nach (5.8) horizontalen Anfangs- und Endteile nur durch die Daten des Gitters gegeben sind. Tab. 2 gibt dazu eine Übersicht.

6. Formale Entwicklung der Ergebnisse. Der „Tensor der Relaxationszeit“ und der „Stoßzeit-Tensor“

Die hier abgeleiteten Formeln (2.6) und (2.7) lassen sich formal recht einfach gewinnen. In der Kristalloptik wird die Dielektrizitätskonstante zu einem Tensor. Dies legt nahe, hier eine analoge Übertragung vorzunehmen, indem man die Stoßzeit τ_0 und die Relaxationszeit τ durch einen Stoß-

zeit-Tensor \mathfrak{T}_0 und einen Tensor der Relaxationszeit \mathfrak{T} ersetzt und im übrigen die einfache isotrope Theorie beibehält. Dabei taucht zunächst einmal die Frage auf, warum ein Magnetfeld, das ja nur eine Kraft längs der Energiefläche erzeugt, überhaupt auf den Energiehaushalt einen Einfluß hat. Dazu und zur Motivierung der folgenden formalen Übertragung soll ein Überblick über die Wirkung eines elektromagnetischen Feldes auf die Zustände im Wellenzahlraum für den Fall eines quasifreien Elektrons gegeben werden.

Mit dem Ansatz für die Energie

$$E = \frac{2m}{\hbar^2} \mathfrak{f}^2 \quad (6.1)$$

ergibt sich aus der Bewegungsgleichung (1.5) die Lösung:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_0 - \frac{e}{\hbar} \mathfrak{T} t + m \times (m \times \mathfrak{f}_0) \left(1 - \cos \frac{eB}{m} t \right) + m \times \mathfrak{f}_0 \sin \frac{eB}{m} t, \quad (6.2)$$

$$\text{bzw.} \quad \left(\mathfrak{f} + \frac{e}{\hbar} \mathfrak{T} t \right)^2 = \mathfrak{f}_0^2. \quad (6.3)$$

Setzt man voraus, daß die Flächen gleicher Be-

setzungsdichte vor Einschalten des Feldes Kugeln waren, so bleiben diese Flächen Kugeln; sie werden in Richtung $-\mathfrak{F}$ mitgenommen und um das Magnetfeld als Achse in sich gedreht. Abb. 2 soll den zu erwartenden Effekt anschaulich darstellen. Das Magnetfeld stehe senkrecht auf \mathfrak{F} und zeige nach oben aus der Zeichenebene heraus.

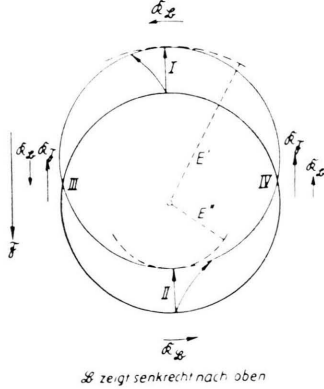


Abb. 2. Wirkung eines elektromagnetischen Feldes.

1. Durch die Verschiebung der Kugel wird die magnetische Kraft an der Stelle I dem Betrage nach größer, an der Stelle II dem Betrage nach kleiner als im rein magnetischen Falle. Es überlagert sich der konstanten Kreiskraft eine nach III hin gerichtete Querkraft. Man bekommt im Punkte III gegenüber dem rein elektrischen Falle eine Anreicherung von Elektronen, im Punkte IV eine Verarmung. Der Effekt ändert bei Umpolen des Magnetfeldes sein Vorzeichen. Als Integral über die gesamte Kugel liefert er jedoch keinen Beitrag.

2. Durch die Drehung der Kugel wird die Energieverschiebung an den Stellen I und II geringer als ohne Magnetfeld. Wegen $\Delta E \sim \mathfrak{f} \cdot \Delta \mathfrak{f}$ ist der Energieverlust an der Stelle I in 2. Ordnung größer als der Energiegewinn an der Stelle II. Es ergibt sich eine resultierende Bremswirkung, die mit \mathfrak{B}^2 geht.

Die in 1. und 2. gegebenen Deutungen stimmen überein mit den Gln. (1.3) und (3.5).

Nach diesen Erläuterungen hat man die Verallgemeinerung der isotropen Theorie in folgender Weise vorzunehmen:

Das elektromagnetische Feld verschiebt die Verteilungsfunktion um eine Strecke $\Delta \mathfrak{f}$:

$$f(\mathfrak{f}) = f_0(\mathfrak{f} - \Delta \mathfrak{f}) = f_0(E) - \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{f}} \cdot \Delta \mathfrak{f} \frac{df_0(E)}{dE}. \quad (6.4)$$

Hierbei ist im isotropen, rein elektrischen Falle:

$$\Delta \mathfrak{f} = \frac{dt}{d\mathfrak{f}} \tau = - \frac{e}{\hbar} \mathfrak{F} \tau. \quad (6.5)$$

Im allgemeinen bekommt man nach den obigen Erläuterungen eine Verschiebung in Richtung $-\mathfrak{F}$ und eine Drehung. Es ist also plausibel, $\Delta \mathfrak{f}$ durch eine lineare Transformation mit \mathfrak{F} zu verbinden:

$$\Delta \mathfrak{f} = - \frac{e}{\hbar} \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{Z}. \quad (6.6)$$

Dabei ist \mathfrak{Z} der „Tensor der Relaxationszeit“. Er ist durch eine Gleichgewichtsbedingung bestimmt. Ist τ die Relaxationszeit und τ_0 die Zeit zwischen zwei Zusammenstößen mit dem Gitter, so ist Gleichgewicht hergestellt, wenn keine resultierenden Kräfte wirken, d. h. wenn die pro Sekunde übertragenen Impulse sich aufheben. Das elektrische Feld überträgt pro Sekunde den Impuls:

$$m \mathfrak{v} / \tau; \quad (6.7)$$

durch Gitterstöße wirkt dem entgegen der Impuls pro Sekunde:

$$m \mathfrak{v} / \tau_0. \quad (6.8)$$

Gleichgewicht heißt also im rein elektrischen Falle

$$\tau = \tau_0. \quad (6.9)$$

Berücksichtigt man nun die magnetische Kraft, so gilt als Gleichgewichtsbedingung

$$m \mathfrak{v} / \tau_0 = m \mathfrak{v} / \tau - e \mathfrak{v} \times \mathfrak{B}. \quad (6.10)$$

Faßt man jetzt wieder das Kreuzprodukt als Skalarprodukt mit einem antisymmetrischen Tensor auf und ersetzt in (1.1) und (6.10):

$$\tau \longrightarrow \mathfrak{Z}, \quad \tau_0 \longrightarrow \mathfrak{Z}_0, \quad 1/m \longrightarrow \Phi, \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \mathfrak{f}} \cdot \mathfrak{F} \tau \longrightarrow \frac{\partial E}{\partial \mathfrak{f}} \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{Z},$$

dann bekommt man aus (6.10) nach Streichung von \mathfrak{v} :

$$\mathfrak{Z}^{-1} = \mathfrak{Z}_0^{-1} + e \Phi \times \mathfrak{B} \quad (6.12)$$

$$\text{oder: } \mathfrak{Z} = (\mathfrak{F} + e \mathfrak{Z}_0 \cdot \Phi \times \mathfrak{B})^{-1} \cdot \mathfrak{Z}_0.$$

Dies ist aber genau (2.6).

Fordert man, daß die mittlere Leistungsaufnahme mit und ohne Magnetfeld dieselbe sein soll, so erhält man für die Leistung:

$$L = \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{p} \frac{1}{m} \quad (6.13)$$

und als Zusatz durch das Feld:

$$L' = \mathfrak{R} \cdot \frac{dp}{dt} \tau \frac{1}{m}. \quad (6.14)$$

Mit $\mathfrak{R} = dp/dt = -e \mathfrak{F}$ und der Ersetzung

$$\mathfrak{R} \cdot \mathfrak{R} \tau \longrightarrow \mathfrak{R} \mathfrak{R} \cdot \mathfrak{T}$$

ergibt sich daraus, wenn man noch über die Teilflächen summiert:

$$L' = e^2 \sum \mathfrak{F} \mathfrak{F} \cdot (\mathfrak{T} \cdot \Phi). \quad (6.15)$$

Die geforderte Gleichheit der Leistungsaufnahme liefert (2.7). Man bekommt (2.7) natürlich auch durch Einsetzen von (6.11) und (6.12) in (1.11) bzw. (1.13).

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. WALTER FRANZ, danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für fördernde Diskussionen.

Über das Verhalten von n-Ge-Einkristallen im Temperaturgebiet des flüssigen Heliums.

VON GÜNTER FINKE UND GÜNTER LAUTZ

Aus dem Institut für technische Physik der Technischen Hochschule Braunschweig
(Z. Naturforschg. **14 a**, 62—74 [1959]; eingegangen am 10. September 1958)

Nach theoretischen Betrachtungen von CONWELL und MOTT soll der Übergang vom normalen Leitungsmechanismus eines Halbleiters zur Störbandleitung im Gebiet tiefster Temperaturen durch eine Kompensation der Störstellenarten des Kristalls begünstigt werden. In der vorliegenden Arbeit wird durch Messungen der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes und des HALL-Effektes für kleine elektrische Felder an n-Ge-Einkristallen unterschiedlicher Störstellenstruktur diese theoretische Aussage auch experimentell belegt.

Die oberhalb einer bestimmten elektrischen Feldstärke U_D von einigen Volt/cm für Meßtemperaturen unter 10 °K beobachtete reversible Abnahme des elektrischen Widerstandes und der HALL-Konstanten in Abhängigkeit vom angelegten Feld kann bei normalem Leitungsmechanismus mit einer Ladungsträgervervielfachung durch Stoßionisation neutraler Störstellen gedeutet werden. Diese Erklärung wird insbesondere durch die Abnahme der „Durchschlagsfeldstärke“ U_D mit zunehmender Beweglichkeit der Ladungsträger und durch die Zunahme von U_D in einem äußeren Magnetfeld gestützt. Quantitativ können durch die Behinderung der Stoßionisation in einem Magnetfeld außergewöhnlich hohe Widerstandsänderungen von 10 000% bei 300 Gauß für elektrische Feldstärken $U \approx U_D$ beobachtet werden. Im Bereich überwiegender Störbandleitung wird zur Deutung der Feldstärkeabhängigkeiten des Widerstandes und des HALL-Effektes nach SCHOTTKY ein neuer Mechanismus der „Ionisierung“ von Elektronen im Störband benutzt.

1. Einführung und Problemstellung

Experimentelle Untersuchungen an Halbleitern bei hohen Temperaturen führen in den meisten Fällen zu recht übersichtlichen Ergebnissen, da die Stoffeigenschaften im wesentlichen durch das Gitter bestimmt sind. Bei tiefen Temperaturen hingegen gewinnen die verschiedenen Störstellen entscheidenden Einfluß, so daß die Deutung derartiger Versuche erheblich erschwert wird. Es ist daher nicht verwunderlich, wenn es selbst bei den gut bekannten Elementhalbleitern Ge und Si im Tieftemperaturgebiet Effekte gibt, die wohl qualitativ, aber noch nicht quantitativ erklärt werden können. Das trifft insbesondere für diejenigen Meßresultate zu, die nicht den üblichen Erwartungen über das Verhalten eines Störstellenhalbleiters entsprechen und in diesem Sinne Anomalien sind. Zu diesen anomalen Effekten gehören z. B. die unterhalb

10 °K beobachtete Störbandleitung und die schon in kleinen elektrischen Feldern von nur wenigen Volt/cm ermittelte Ladungsträgervervielfachung durch Stoßionisation, die ebenfalls erst im Heliumtemperaturgebiet besonders hervortritt.

Während ein idealer Störstellenhalbleiter zu tiefen Temperaturen hin eine exponentielle Abnahme der elektrischen Leitfähigkeit und eine äquivalente Zunahme der HALL-Konstanten zeigen sollte, konnten schon BUSCH und LABHART¹ am SiC und etwas später HUNG und GLIESMAN^{2, 3} am Ge feststellen, daß unterhalb einer von Probe zu Probe verschiedenen Temperatur die Aktivierungsenergie der Trägererzeugung erheblich abnimmt und die HALL-Konstante ein Maximum durchläuft. Systematische Un-

¹ G. BUSCH u. H. LABHART, *Helv. Phys. Acta* **19**, 463 [1946].

² C. S. HUNG, *Phys. Rev.* **79**, 726 [1950].

³ C. S. HUNG u. J. R. GLIESMAN, *Phys. Rev.* **79**, 727 [1950].